Examen de Análisis Complejo

Curso IV de Matemáticas (Esp. Fundamental)

7 de septiembre de 1999

1. Supongamos que $-1 < \alpha < 3$. Integrando la función $z \mapsto \dfrac{z^\alpha \log z}{1+z^4}$ a lo largo de la frontera del conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} : \varepsilon < |z| < R,\ 0 < \arg(z) < \pi/2\}, \quad (0 < \varepsilon < 1 < R)$$

calcúlense las integrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^4}\, dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \log x}{1+x^4}\, dx.$$

2. Obtener todas las funciones holomorfas, f, que aplican el semiplano superior en el disco unidad y verifican que $f(i) = 0$, $|f'(i)| = 1/2$.

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n(z) = e^z - 4z^n + 1$. Justifíquese que f_n tiene n ceros en el disco unidad y que, dado $\rho \in]0,1[$, para n suficientemente grande se verifica que todos ellos están en el anillo $A(0;\rho,1)$.

4. Sea P una función polinómica de grado n tal que $|P(z)| \leq 1$ para todo z en la circunferencia unidad $C(0,1)^*$. Pruébese que $|P(z)| \leq |z|^n$ para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| > 1$.

5. Construir un isomorfismo conforme del dominio

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0, -\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2\}$$

sobre el disco unidad $D(0,1)$.